22) R. $x < \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$, $x > \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$

3) Per la radice deve essere $x \ge -\dfrac{3}{2}$. Se $2x-3<0$ ossia $x<\dfrac{3}{2}$ la disequazione è verificata. Se $x\ge \dfrac{3}{2}$ la disequazione diventa $2x^2-7x+3<0$ ossia $\dfrac{3}{2}<x<3$ e quindi la soluzione è $[-\dfrac{3}{2},3)$

4) $x\ge -\dfrac{1}{2}$ per la radice. Numeratore: $2x-2>0$ per $x>1$. Denominatore: $2x-\sqrt{2x+1}>0$. Se $x\le 0$ si ha sempre $2x-\sqrt{2x+1}<0$ mentre se $x>0$ si ha $4x^2-2x-1>0$ e quindi $x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ oppure $x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Mettendo tutto assieme la soluzione è $x\in(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4},1)$

5) $2|x|-3\ge 0$ per la radice ossia $|x|\ge \dfrac{3}{2}$ e quindi $x<-\dfrac{3}{2}$ oppure $x>\dfrac{3}{2}$. Cominciamo da $x\ge \dfrac{3}{2}$. La disequazione diventa $\dfrac{\sqrt{2x-3}-x}{4-x^2}>0$. Numeratore: $\sqrt{2x-3}-x>0$ ossia $x^2-2x+3<0$ mai in quanto il discriminante è negativo. Denominatore: $4-x^2>0$ per $-2<x<2$. Riunendo il tutto risulta $x>2$.
Sia ora $x<0$. La disequazione diventa $\dfrac{\sqrt{-2x-3}+x}{4-x^2}>0$. Il numeratore è sempre negativo. Il denominatore è come prima. Si ottiene $x<-2$.
Riunendo con la parte $x>0$ si ha $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$
6) Per $x>\dfrac{2}{3}$ si ha $4>y>3x-2$. Per $0<x<\dfrac{2}{3}$ si ha $4>y>2-3x$. Per $x<-\dfrac{2}{3}$ si ha $4>y>-3x-2$. Per $-\dfrac{2}{3}<x<0$ is ha $4>y>3x+2$. Il risultato è $\dfrac{28}{3}$.

7) $\sin x\ge 0$ implica $\sin x>\sqrt{3}\cos x$. Bisogna quindi distinguere due casi $0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}<x\le \pi$. Se $0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$ l'equazione è $\tan x>\sqrt{3}$. Si tenga presente che per dividere per $\cos x$ bisogna che $\cos x\ne 0$ ossia $x\ne \dfrac{\pi}{2}$. Per tale valore di x la disequazione è verificara essendo $1>\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2}=0$. La soluzione è quindi $\dfrac{\pi}{3}<x\le \dfrac{\pi}{2}$. Se $\dfrac{\pi}{2}<x\le\pi$ il coseno è negativo e quindi la disequazione diventa $\tan x<\sqrt{3}$ la cui soluzione è $\dfrac{2}{3}\pi<x\le\pi$. Dunque fino ad ora la soluzione è $x\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{2}{3}\pi,\pi)$
Se $\sin x<0$ ossia $-\pi<x<0$ si ha $-\sin x>\sqrt{3}\cos x$. Se $x=-\dfrac{\pi}{2}$ la disequazione è verificata. Qui bisogna distinguere i due casi $-\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}$ e $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$. Se $-\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}$ si ha $-\tan x<\sqrt{3}$; quindi $\tan x>-\sqrt{3}$ la cui soluzione è $-\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}$
Se $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ si ha $-\tan x>\sqrt{3}$; quindi $\tan x<-\sqrt{3}$ la cui soluzione $-\dfrac{\pi}{2}<x<-\dfrac{\pi}{3}$.
Riunendo si ottiene $x\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}]\cup(\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{5}{3}\pi)$

8) $2^{\log 3}3^{-\log 2}=2^{\log_2 3\log 2}3^{-\log 2}=3^{\log 2}3^{-\log 2}=1$

9) Se $\cos x\ge 0$ $(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ si ha $\dfrac{1+\sqrt{3}\tan x}{1-\tan x}>0$. $1+\sqrt{3}\tan x>0$ implica $x\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$
$1-\tan x>0$ implica $x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4})$ e quindi la soluzione è $x\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})$

Se $\cos x \le 0$ ($\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3}{2}\pi$) si ha $\dfrac{-1+\sqrt{3}\tan x}{1-\tan x} > 0$. $-1+\sqrt{3}\tan x > 0$ implica $\frac{7}{6}\pi < x \le \frac{3}{2}\pi$).
$1-\tan x > 0$ implica $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi)$ e quindi $x \in (\frac{7}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi)$

10) (e' scritto 9) in rete) La prima: razionalizzando le due espressioni si arriva a $\sqrt{6}-\sqrt{3}-2+\sqrt{2}$. La seconda: moltiplicando sopra e sotto per $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$ e moltiplicando il risultato sopra e sotto per $3-\sqrt{2}$ si arriva a $\sqrt{6}-\sqrt{3}-2+\sqrt{2}$.

Il risultato della 10) è $2\sqrt{ab}$

12) Bisogna distinguere 4 casi: 1) $x^2+y \ge 0$, $y^2+x \ge 0$, 2) $x^2+y \le 0$, $y^2+x \ge 0$, 3) $x^2+y \ge 0$, $y^2+x \le 0$, 4) $x^2+y \le 0$, $y^2+x \le 0$, ed esaminarli con ordine.

1) $x^2+y \ge 0$, $y^2+x \ge 0$, implica $x^2+y \ge y^2+x$ ossia $(x-y)(x+y) \ge x-y$ e quindi vanno considerati due casi specifici: 1.1) $x-y \ge 0$, 1.2) $x-y < 0$

1.1). L'insieme è identificato dalle relazioni $x^2+y \ge 0$, $y^2+x \ge 0$, $x-y \ge 0$ e $y \ge 1-x$. Come si vede dandone una rappresentazione grafica, l'insieme è illimitato e quindi non ha senso trovarne l'area.

1.2). $x^2+y \ge 0$, $y^2+x \ge 0$, $x-y < 0$ e $y \le 1-x$. L'insieme è composto da tre parti. La prima parte è definita da $\{(x,y)\colon y \le 1-x, y \ge x, x \ge 0\}$. La seconda è definita da $\{(x,y)\colon y \ge \sqrt{-x}, y < 1-x, y \ge x, x < 0\}$. La prima e la seconda parte formano un insieme illimitato. La terza è definita da $\{(x,y)\colon y \le -\sqrt{-x}, y \ge x, x \le 0\}$.

2) $x^2+y \le 0$, $y^2+x \ge 0$, che dà luogo alla relazione $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2 \ge \frac{1}{2}$ che è una circonferenza centrata nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e di raggio $1/\sqrt{2}$.

3) $x^2+y \ge 0$, $y^2+x \le 0$, che dà luogo alla relazione $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{2}$ che è una circonferenza centrata nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e di raggio $1/\sqrt{2}$.

4) $x^2+y \le 0$, $y^2+x \le 0$, che dà luogo alla relazione $(y-x)(y+x) \le y-x$ e quindi vanno considerati i due casi: 4.1) $y-x \ge 0$, e 4.2) $y-x < 0$

4.1) $x^2+y \le 0$, $y^2+x \le 0$, $y-x \ge 0$ e $y \le 1-x$. ed è un insieme limitato.

4.2) $x^2+y \le 0$, $y^2+x \le 0$, $y-x \le 0$ e $y \ge 1-x$. ed è un insieme vuoto.

13) Conviene traslare (cambiamento di variabili) ponendo $x+a=\xi$, $y-a=\eta$ da cui $\Big||\xi|-|\eta|\Big| \le a$ e $|\eta+a| \le b$. Bisogna considerare quattro casi: 1) $\xi \ge 0$, $\eta \ge 0$, 2) $\xi > 0$, $\eta \le 0$, 3) $\xi \le 0$, $\eta < 0$, 4) $\xi < 0$, $\eta > 0$.

Cominciamo con 1). Dobbiamo trovare l'area dell'insieme $|\xi-\eta| \le a$, $|\eta+a| \le b$ distinguendo i due sottocasi: 1.1) con $\xi-\eta \ge 0$ e 1.2) con $\xi-\eta < 0$.

1.1) Abbiamo $\xi \ge \eta$, $\eta \ge \xi - a$, $-a-b \le \eta \le -a+b$.

- Se $b \le a$ l'insieme è vuoto in quanto $b-a \le 0$ e quindi η, dovendo essere non negativa, può al massimo essere nulla. L'area è pertanto nulla.
- Se $b > a$ l'insieme diventa $\xi \ge \eta$, $\eta \ge \xi - a$, $0 \le \eta \le -a+b$ ed è rappresentato dall'insieme $\mathcal{A}$ della figura 1). $A=(a,0)$, $B=(b,b-a)$, $C=(b-a,b-a)$. L'area di $\mathcal{A}$ è pertanto (essendo

un parallelogramma che poggia su una delle basi), $a(b-a)$. Oppure si può calcolare come l'area del trapezio $OABC$ meno l'area del rettangolo $AB'B$ ossia $\dfrac{(b+a)(b-a)}{2}-\dfrac{(b-a)^2}{2}=a(b-a)$

1.2) Abbiamo $\xi<\eta$, $\eta\le\xi+a$, $0\le\eta\le -a+b$ ossia l'insieme $\mathcal{B}$. D ha coordinate $(b-2a,b-a)$.

- Se $b\ge 2a$, l'area è $\dfrac{(b-a)^2}{2}-\dfrac{(b-2a)^2}{2}=ab-\dfrac{3}{2}a^2$.

- Se $a\le b\le 2a$ allora il punto D sta nel quarto quadrante e l'area cercata è data dall'area del triangolino $\mathcal{T}$ ossia $\dfrac{(b-a)^2}{2}$ che è esattamente pari alla formula precedente qualora si ponga $b=2a$.

In conclusione, se $b<a$ l'insieme è vuoto. Se $a\le b\le 2a$ l'area è $a(b-a)+\dfrac{(b-a)^2}{2}=\dfrac{b^2-a^2}{2}$. Se $b>2a$ l'area è $a(b-a)+ab-\dfrac{3}{2}a^2=2ab-\dfrac{5}{2}a^2$ e va notato che le due formule coincidono per $b=2a$.

Passiamo a 2). Dobbiamo trovare l'area dell'insieme $|\xi+\eta|\le a$, $|\eta+a|\le b$ distinguendo i due sottocasi: 2.1) con $\xi-\eta\ge 0$ e 2.2) con $\xi-\eta<0$.

2.1) $\xi+\eta\ge 0$, $\eta\le a-\xi$, $-a-b\le\eta\le b-a$.

- Sia $b\ge a$. Abbiamo $-a-b\le\eta\le 0$. La regione individuata è la $\mathcal{C}$ con $E=(b+2a,-a-b)$, $F=(b+a,-a-b)$, e l'area è $a(a+b)$

- Se $b<a$ l'insieme è dato dalle seguenti relazioni $\eta\ge-\xi$, $\eta\le a-\xi$, $-a-b\le\eta\le b-a$ e l'area è pari a $a(a+b-a+b)=2ab$ che per $b=a$ è uguale alla precedente

2.2) $\xi+\eta<0$, $\eta\ge -a-\xi$, $-a-b\le\eta\le b-a$.

- $b\ge a$. La regione individuata è la $\mathcal{D}$ con $G=(b,-a-b)$, e l'area è $\dfrac{(b+a)^2}{2}-\dfrac{b^2}{2}=\dfrac{a}{2}(a+2b)$

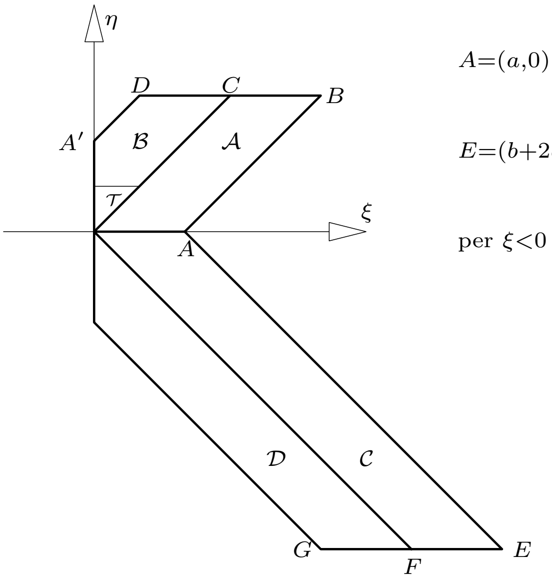
- Se $b<a$ l'area è $\dfrac{a}{2}(a+2b)-\dfrac{(b-a)^2}{2}=\dfrac{4ab-b^2}{2}$

Riassumendo se $b\le a$ l'area è $4ab-\dfrac{b^2}{2}$. Se $b>a$ l'area è $a(a+b)+\dfrac{a}{2}(a+2b)=2ab+\dfrac{3}{2}a^2$ e per $b=a$ le due formule coincidono.

Passiamo a 3). Si potrebbero rifare i calcoli precedenti ma conviene osservare che rispetto agli insiemi $\mathcal{C}$, e $\mathcal{D}$ il nuovo insieme si caratterizza solamente per il passaggio da ξ a $-\xi$. Se si guarda alle definizioni dell'insieme ossia $\Big||\xi|-|\eta|\Big|\le a$ e $|\eta+a|\le b$, si vede che cambiare ξ in $-\xi$ non cambia l'insieme stesso. In altre parole si dice che l'insieme è *invariante* rispetto alla simmetria $\xi\to-\xi$. Lo studente/ssa svolga lo stesso i calcoli e verifichi quanto detto.

Passiamo a 4). Valgono le stesse considerazioni del punto 3) con $\mathcal{C}$, e $\mathcal{D}$ sostituiti ad $\mathcal{A}$, e $\mathcal{B}$

Alla fine il risultato è : i) $0\le b\le a$, $8ab-b^2$, ii) $a\le b\le 2a$, $4ab+2a^2+b^2$, iii) $b\ge 2a$, $8ab-2a^2$



$A=(a,0),\ B=(b,b-a),\ C=(b-a,b-a),\ D=(b-2a,b-a)$

$E=(b+2a,-a-b),\ F=(b+a,-a-b),\ G=(b,-a-b)$

per $\xi<0$ il disegno è simmetrico rispetto all'asse delle η

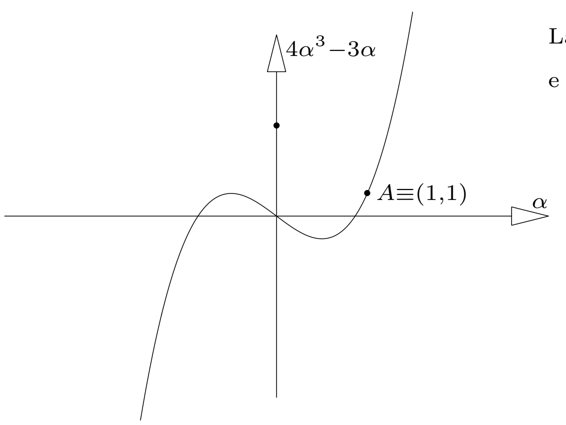
14) La soluzione è data da ogni $x\geq 3$. Infatti la radice interna è definita per $x\geq 3$ ed inoltre $\dfrac{x-3}{x^2+1}<1$ (dimostrare). Essendo $3x^2\geq 27$, si ha il risultato.

15) Certamente deve essere $x\geq -2$. Poniamo $x+2=z$ (da cui $z\geq -1$) ed otteniamo $(1+z)^{1/2}-z^{1/3}=1$ ossia $(1+z)^{1/2}=1+z^{1/3}$. Poi eleviamo al quadrato *dopo avere osservato* che $1+z^{1/3}\geq 0$ ottenendo $1+z=1+2^{1/3}+z^{2/3}$. Poi definiamo $z^{1/3}=t$ e quindi $t^3-t^2-2t=0$ le cui soluzioni sono $t=-1,0,2$ che corrispondono a $z=-1,-2,6$, ed infine a $x=-3,-2,6$.

16) Deve essere $x,y,z\geq 1/4$ e quindi ogni addendo del sistema è positivo. Facendo il quadrato dei primi due e sottraendo si ottiene $(y-z)(y+z)+2x(y-z)=4(z-y)$ e si deveono considerare due casi. Il primo è $y=z$. Dalla terza equazione otteniamo $4z^2=4x-1$ ed inserendo nella seconda si ottiene $(z+\dfrac{1}{4}+z^2)^2=4z-1$ ossia $(z+\dfrac{1}{2})^4=(4z-1)$. Ponendo $z+\dfrac{1}{2}=t$ si ottiene $t^4=4t-3$ ed attraverso la scomposizione si può scrivere $t^4-4t+3=(t-1)^2(t^2+2t+3)$ da cui $t=1$ come unica soluzione reale doppia. $t=1$ corrisponde a $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Se invece $y\neq z$ in $(y-z)(y+z)+2x(y-z)=4(z-y)$ allora abbiamo $y+z=-2x-4$ e sostituendo nella terza si ha $4x^2+12x+18=0$ che non ha soluzioni reali.

17)



La funzione $4\alpha^3-3\alpha$ è maggiore di uno per ogni $\alpha>1$ e minore di -1 per ogni $\alpha<-1$.

Innanzitutto osserviamo che il sistema ha le due soluzioni $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$. Inoltre osserviamo che alla soluzione (x_0,y_0,z_0) si accompagna sempre la soluzione $(-x_0,-y_0,-z_0)$. Quindi è sufficiente trovare solo 13 soluzioni. È evidente poi che se, ad esempio, $x=1$, allora $y=1$ e che per la stessa ragione $z = 1$. Sommando le tre equazione si arriva alla relazione $z+y+z = x^3+y^3+z^3$ e conseguentemente i tre numeri (x, y, z) non possono essere contemporaneamente tutti e tre maggiori di 1 oppure minori si 1. Supponiamo quindi che $x > 1$ e $y < 1$. Dal grafico della $f(x)$ segue che $y > 1$ e cadiamo in contraddizione. L'unica conseguenza possibile è che le soluzioni sono $(-1, -1, -1)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$